## Algebra czasoprzestrzeni

Zajmowaliśmy się dotąd algebrą przestrzeni. Czas poszerzyć naszą algebrę dodając nowy wymiar. Jak później zobaczymy, ten nowy wymiar będzie związany z czasem. Póki co nie musimy się tym martwić. Bawimy się w algebrę, ot co. Algebra przestrzeni trójwymiarowej oparta była na prostych relacjach algebraicznych, które powinny spełniać wersory bazowe $e_1, e_2, e_3$ odpowiadające osiom $x, y, z$ układu współrzędnych: Ich kwadraty są wszystkie równe jedności:

$$e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = 1, \tag{1}$$

zaś różne są ze sobą antyprzemienne:

$$e_1e_2 + e_2e_1 = 0,\ e_2e_3 + e_3e_2 = 0,\ e_3e_1 + e_1e_3 = 0. \tag{2}$$

Chcemy dodać nowy wymiar do algebry, jednak różniący się od pozostałych wymiarów w sposób istotny. By się nam nie myliło z algebrą przestrzeni, użyję miast literki "e" greckiej literki $\gamma$. Dlaczego? Bo tak się przyjęło w fizyce. Więc czemu mamy silić się na oryginalność. Będziemy mieć więc $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, no i jeszcze jedną gammę. Jak ją nazwać? Dwie możliwości się narzucają: $\gamma_0$ lub $\gamma_4$. I znów, ze względów historycznych wybiorę pierwszą z tych możliwości a nie drugą. W ten sposób nasze oznaczenia będą bliższe oznaczeń używanych dość powszechnie przez fizyków.

To rzekłszy przedstawiam reguły pozwalające na zbudowanie algebry czasoprzestrzeni:

$$\gamma_0^2 = -1,\ \gamma_1^2 = \gamma_2^2 = \gamma_3^2 = 1, \tag{3}$$

$$\gamma_0\gamma_1 + \gamma_1\gamma_0 = 0, ... \tag{4}$$

Teraz musiałbym napisać sześć takich równości, lepiej więc zapisać je jedną formułą:

$$\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 0, \quad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3,\ \mu < \nu). \tag{5}$$

To, że kwadrat $\gamma_0$ jest równy $-1$ odróżnia tę gammę od innych. Mamy więc trzy plusy i jeden minus. Krótko mówiąc: bawimy się algebrą Clifforda $Cl(3, 1)$.

Jak poprzednio tak i teraz zaczniemy od zliczania jej wymiarów. Dla algebry $Cl(3, 0)$ mieliśmy $1 + 3 + 3 + 1 = 8$ wymiarów. A teraz?

0. Baza skalarów:

   1 - jeden wymiar

1. Baza wektorów:

   $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ - cztery wymiary

2. Baza dwuwektorów:

   $\gamma_0\gamma_1, \gamma_0\gamma_2, \gamma_0\gamma_3, \gamma_1\gamma_2, \gamma_1\gamma_3, \gamma_2\gamma_3$ - sześć wymiarów

3. Baza trójwektorów:

   $\gamma_1\gamma_2\gamma_3, \gamma_0\gamma_2\gamma_3, \gamma_0\gamma_1\gamma_2, \gamma_0\gamma_1\gamma_3$ - cztery wymiary

4. Baza czterowektorów:

   $\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ - jeden wymiar.

Razem $1+4+6+4+1=16$ wymiarów. Ciekawe, dodaliśmy tylko jeden wymiar a wymiar algebry Clifforda się podwoił! Ale tak będzie zawsze: Algebra Clifforda $Cl(p,q)$ ma wymiar $2^{p+q}$.

Oczywiście algebra $Cl(3,1)$ zawiera w sobie algebrę Clifforda $Cl(3,0)$. Wystarczy rozpiąć algebrę na elementach generujących $1, \gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3$. Ale $Cl(3,1)$ zawiera też $Cl(3,0)$ w mniej oczywisty sposób. Mianowicie, podobnie jak w $Cl(3,0)$, tak i w $Cl(3,1)$ można wydzielić podalgebrę parzystą $Cl^+(3,1)$. Ta ma połowę wymiaru całej algebry, jej wymiar wynosi więc 8 - jak trzeba. Zdefiniujmy teraz

$$e_1 = \gamma_0\gamma_1,\ e_2 = \gamma_0\gamma_2,\ e_3 = \gamma_0\gamma_3. \tag{6}$$

Krótko: $e_i = \gamma_0\gamma_i, \quad (i=1,2,3)$. Rachunek daje teraz

$$e_ie_j + e_je_i = \gamma_0\gamma_i\gamma_0\gamma_j + \gamma_0\gamma_j\gamma_0\gamma_i = -\gamma_0^2(\gamma_i\gamma_j + \gamma_j\gamma_i) = 2\delta_{ij}, \tag{7}$$

gdzie $\delta_{ij}$ jest tzw. *deltą Kroneckera* - symbolem równym 1 gdy $i=j$ i równym 0 dla $i \neq j$. Nasze $e_i$ spełniają więc te same relacje co generatory algebry $Cl(3,0)$, a że są parzyste (bo są iloczynami dwóch generatorów algebry $Cl(3,1)$,) zatem i generują parzystą podalgebrę algebry $Cl(3,1)$. Podobnie jak to było z algebrą przestrzeni $Cl(3,0)$, tak i w algebrze czasoprzestrzeni $Cl(3,1)$ wektory generują odbicia, zaś elementy parzyste generują obroty. Dla algebry $Cl(3,1)$ będą to obroty w czasoprzestrzeni, n.p. obroty w płaszczyźnie "czas-jedna z osi przestrzennych" - spodziewamy się zatem, że można w ten sposób otrzymać transformacje Lorentza. Skoro parzysta podalgebra $Cl(3,1)^+$ jest izomorficzna z algebrą $Cl(3,0)$, która z kolei jest izomorficzna z algebrą $Mat(2, \mathbf{C})$ macierzy zespolonych $2x2$, to powinniśmy być w stanie odtworzyć przekształcenia Lorentza z algebry macierzy $Mat(2, \mathbf{C})$.

**Algebra $Mat(2, \mathbf{C})$ i przekształcenia Lorentza**

Z macierzami Pauliego spotkać się nietrudno. Są to

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Wszystkie cztery są hermitowskie $\sigma_\mu^* = \sigma_\mu, \quad (\mu = 0, \ldots, 3$. Macierz $\sigma_0$ to prostu macierz jednostkowa, zwykle nie zalicza jej się do "macierzy Pauliego". Macierze $\sigma_i$ mają wszystkie trzy ślad równy zeru: $tr(\sigma_i) = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$ (Ślad to suma elementów na głównej przekątnej). Każdą macierz zespoloną $A$ można przedstawić jako kombinację liniową macierzy Pauliego (z zespolonymi współczynnikami):

$$A = \sum_\mu a^\mu \, \sigma_\mu. \tag{8}$$

Każdą macierz hermitowską $A = A^*$ można przedstawić jako kombinację liniową ze współczynnikami $a^\mu$ rzeczywistymi.

Wróćmy do czasoprzestrzeni Minkowskiego, wybierzmy inercjalny układ odniesienia. Każde zdarzenie $x$ reprezentowane jest teraz przez cztery liczby rzeczywiste $x^0 = ct, x^1, x^2, x^3$. Ze zdarzeniem takim możemy zatem związać macierz hermitowską $X = x^\mu \sigma_\mu$ (stosujemy konwencję Einsteina, sumujemy po powtarzających się wskaźnikach). Pisząc $x, y, z$ zamiast $x^1, x^2, x^3$ nasza macierz związana ze zdarzeniem (punktem w czasoprzestrzeni) ma jawną postać:

$$X = \begin{pmatrix} x^0 + z & x - iy \\ x + iy & x^0 - z. \end{pmatrix} \tag{9}$$

Obliczając wyznacznik otrzymujemy $(x^0 + z)(x^0 - z) - (x + iy)(x - iy) = (x^0) - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$, co jest interwałem czasoprzestrzennym pomiędzy zdarzeniem 0 a naszym zdarzeniem. Zatem geometria czasoprzestrzeni jest jakoś automatycznie zakodowana w algebrze macierzy $2 \times 2$. Trudno nie wyrazić tu zdziwienia. Ślad macierzy $X$ jest zaś równy $2x^0 = 2ct$. Mamy więc czasoprzestrzeń Minkowskiego zakodowaną w macierzach hermitowskich

$2 \times 2$. Każdemu zdarzeniu odpowiada macierz i każdej macierzy odpowiada zdarzenie. A co z przekształceniami Lorentza? Te powinny być odwracalne, zatem spodziewamy się, że macierze odpowiadające za przekształcenia Lorentza winny być odwracalne. Macierz jest odwracalna gdy jej wyznacznik jest różny od zera. Macierze reprezentujące przekształcenia Lorentza winny więc być odwracalne, powinny mieć wyznacznik różny od zera. Czemu więc ten wyznacznik ma być równy? Najprościej będzie jeśli przyjmiemy, że wyznacznik ten powinien być równy 1. Ponieważ wyznacznik iloczynu macierzy jest równy iloczynowi wyznaczników, to nasz warunek zostaje zachowany przy mnożeniu macierzy, a mnożenie macierzy powinno odpowiadać składaniu przekształceń. Przekształcenie Lorentza winno przeprowadzać współrzędne zdarzeń w nowe ich współrzędne, powinno zatem przekształcić macierz hermitowską $X$ w inną macierz hermitowską $X'$. Jaką formułę tu wymyślić? Nie mamy zbytniego wyboru. Najprostszą formułą posiadającą wszystkie dobre własności jest

$$X' = AXA^*. \tag{10}$$

Zauważmy, że teraz

$$\det(X') = \det(A)\det(X)\det(A^*) = \det(A)\,\overline{\det(A)}\det(X) = \det(X),$$

zatem nasza formuła zachowuje interwał czasoprzestrzenny - jak to jest wymagane od przekształceń Lorentza. Wśród wszystkich macierzy $2 \times 2$ o wyznaczniku równym jeden wyróżniają się macierze unitarne, t.j. takie macierze $U$ dla których nie tylko wyznacznik $\det(U)$ jest równy 1, lecz także dla których $U^*U = UU^* = 1$. Macierze te tworzą grupę ze względu na mnożenie macierzy, grupę tę oznaczamy symbolem $SU(2)$. Większą grupę, grupę wszystkich macierzy $2 \times 2$ o wyznaczniku 1 oznaczamy symbolem $SL(2, \mathbf{C})$. Litera $S$ oznacza "special" (wyznacznik 1), Litera $L$ oznacza "linear" - grupa przekształceń liniowych. Grupa wszystkich odwracalnych macierzy $2\times2$ oznaczana jest symbolem $GL(2, \mathbf{C})$ (G - 'general', ogólna).

Dla macierzy $U$ z grupy $SU(2)$ mamy ciekawą własność wynikającą wprost z własności śladu. Ślad macierzy ma bowiem ciekawą własność: dla dowolnych macierz $A, B, C$ mamy:

$$tr(ABC) = tr(CAB) = tr(BCA). \tag{11}$$

Nie zmienia się przy cyklicznym przestawianiu. W zastosowaniu do przekształceń Lorentza wynika stąd, że dla macierzy $U$ z grupy $SU(2)$ mamy

$$2x^{0'} = tr(X') = tr(UXU^*) = tr(U^*UX) = tr(X) = 2x^0. \tag{12}$$

Zatem przy transformacjach czasoprzestrzeni wynikających z zastosowania macierzy unitarnych współrzędna czasowa nie ulega zmianie. Ulegają zmianie jedynie trzy współrzędne przestrzenne. Ponieważ zachowywany jest przy tym interwał czasoprzestrzenny, wynika stąd, że nie zmienia się przy takich transformacjach także długość wektorów. Są to więc zwykłe trójwymiarowe obroty. Gdzie się więc kryją szczególne transformacje Lorentza?

W Wikipedii, pod hasłem *rozkład macierzy* możemy znaleźć taką oto ciekawą własność uogólniającą postać biegunową liczb zespolonych:

> Rozkład biegunowy to przedstawienie macierzy $A$ w postaci
>
> $$A = UR$$
>
> gdzie
>
> - $U$ to częściowa izometria,
> - $R$ to macierz dodatnio określona.

Dla macierzy odwracalnych, zespolonych, oznacza to: $U$ to macierz unitarna, $R$ - macierz dodatnio określona. W naszym przypadku $\det(A) = 1$, nie ma tu innego wyjścia niż $\det(R) = 1$, $\det(U) = 1$. Zatem ogólne twierdzenie z algebry rozkłada dowolną transformację z grupy $SL(2, \mathbf{C})$ na czysty obrót przestrzenny (reprezentowany przez $U$) i "jeszcze coś". Tym jeszcze czymś warto się zająć. Te "jeszcze cosie" to macierze dodatnio określone o wyznaczniku równym 1. Chcielibyśmy na przykład wiedzieć czy $tr(R)$, jakby nie było liczba dodatnia, ma jakąś interpretację fizyczną? A może ten ślad ma jakiś związek z prędkością jednego układu odniesienia względem drugiego (prędkością mierzoną oczywiście jako bezwymiarowe $\beta = v/c$).

Macierz dodatnio określona to taka która ma nieujemne wartości własne. Niech $\lambda_1, \lambda_2$ będą wartościami własnymi macierzy $R$. Wyznacznik macierzy jest równy iloczynowi jej wartości własnych. Skoro wyznacznik $R$ jest równy 1, zatem musi być $\lambda_2 = 1/\lambda_1$. Nasza macierz ma więc wartości własne $\lambda > 0$ i drugą $1/\lambda$. Potrzebne nam teraz drugie twierdzenie z algebry, też możemy je znaleźć w Wikipedii pod hasłem "Diagonalizacja":

> Macierze symetryczne i hermitowskie są zawsze diagonalizowalne.
> Jeśli dla pewnej macierzy $A$ mamy rozkład diagonalny
>
> $$A = P\Delta P^{-1}$$
>
> wówczas:

- macierze $A$ i $\Delta$ są podobne,
- iloczyn wszystkich wartości własnych macierzy $A$ jest równy jej wyznacznikowi,
- jeśli $A$ jest macierzą symetryczną to $P$ jest macierzą ortogonalną,
- jeśli $A$ jest macierzą hermitowską to $P$ jest macierzą unitarną, a wartości własne są rzeczywiste,

Nasza macierz $R$ jest dodatnio określona, jest więc, w szczególności, hermitowska. Zatem $P$ jest unitarna. Macierz $\Delta$ ma na przekątnej wartości własne $\lambda, 1/\lambda$. Możemy więc naszą ogólną macierz $A$ z grupy $SL(2, \mathbf{C})$ zapisać jako

$$A = UR = UP\Delta P^{-1} = V\Delta W, \tag{13}$$

gdzie $V = UP$ i $W = P^{-1}$ są z grupy $SU(2)$, zatem reprezentują dwa obroty czysto przestrzenne. Zgadujemy więc, że samo sedno transformacji Lorentza musi się kryć w prostej macierzy diagonalnej

$$\Delta = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}. \tag{14}$$